सांख्यिकी की विधियाँ

(Statistical Methods)

M.A. Economics (Previous)

Paper Code: 20ECO21C5

Author

Dr Surender Kumar

Deptt of Mathematics

Gaur Brahman Degree College Rohtak

Vetted by

Prof. Kuldeep Chhikara

Deptt of Commerce, MDU Rohtak-124001

DIRECTORATE OF DISTANCE EDUCATION

MAHARSHI DAYANAND UNIVERSITY, ROHTAK

(A State University established under Haryana Act No. XXV of 1975)

NAAC 'A+' Grade Accredited University

www.mdudde.net www.mdu.ac.in

Author

Dr Surender Kumar
Deptt of Mathematics
Gaur Brahman Degree College Rohtak

Vetted by

Prof. Kuldeep Chhikara

Deptt of Commerce, MDU Rohtak-124001

Printed at: MDU Press

TABLE OF CONTENT

Remarks

Unit – I

MEASURES OF CENTRAL TENDENCY

इकाई के उद्देश्य :–

- केन्द्रीय प्रवृति के मापों की जानकारी प्राप्त करना।
- माध्य, बहुलक व माध्यिका की गणना की जानकारी प्राप्त करना।
- केन्द्रीय प्रवृति के मापों की जानकारी प्राप्त करना।

ढाँचा :–

- केन्द्रीय प्रवृति के माप (Measures of Central Tendency)
- समानान्तर माध्य (Arithmetic Mean)
- माध्यिका (Median)
- बहुलक (Mode)

केन्द्रीय प्रवृति के माप से अभिप्राय उस बिन्दु से है जिसके आस–पास अन्य बिन्दुओं का जमाव होने की प्रवृति पाई जाती है। यह हमें वितरण के बारे में समग्र रूप से जानकारी प्राप्त करता है। उदाहरण के तौर पर अगर किसी विद्यार्थी द्वारा प्राप्त अंकों का औसत मान यदि 70 है तो इसका मतलब है कि विद्यार्थी ने औसत रूप से 70 प्रतिशत अंक प्राप्त किए हैं बेशक विद्यार्थी ने प्रत्येक विषयों में अलग – अलग अंक प्राप्त किए हों। अतः हम कह सकते हैं कि केन्द्रीय प्रवृति के माप हमें मोटे तौर पर किसी भी वितरण की जानकारी एक एकल मान के रूप में प्रदान करते हैं।

<u>केन्द्रीय प्रवृति के मापों का वर्गीकरण</u>

केन्द्रीय प्रवृति के मापों का वर्गीकरण निम्न प्रकार से है :–

केन्द्रीय प्रवृति के माप (Measures of Central Tendency)

औसत मान (Mean Value)

1. समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)
2. हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)
3. गुणोतर माध्य (Geometric Mean)

स्थैतिकमान (Positional Average)

1. चतुर्थक (Quartiles)
2. दशमक (Deciles)
3. शतमक (Percentiles)

बहुलक (Mode)

उक्त मापों को विस्तृत रूप से इस प्रकार वर्णित किया जा सकता है :

Remarks

औसत मान : किसी भी वितरण का औसत मान, केन्द्रीय प्रवृति का वह माप है जो वितरण की सभी मदों का प्रतिनिधित्व करता है अर्थात् इसकी गणना सभी मदों के आधार पर की जाती है। औसत मान की गणना मुख्यतः निम्न तीन प्रकार से होती है :

1. समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)
2. गुणोतर माध्य (Geometric Mean)
3. हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

सामान्तर माध्य दो प्रकार के होते हैं :–

1. सरल सामान्तर माध्य (Simple Arithmetic Mean)
2. भारित सामान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)

1. सरल समान्तर माध्य को ज्यादातर प्रयोग करने की वजह से इसे समान्तर माध्य ही लिखा जाता है।
2. भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)

   सरल समान्तर माध्य का एक दोष यह है कि यह श्रेणी (Series) के सभी मूल्यों को समान महत्त्व देती है जबकि वास्तविकता यह है कि श्रेणी के विभिन्न मूल्यों का अपना अलग – अलग महत्त्व होता है जैसे विज्ञान के विद्यार्थियों के लिए Physics, Chemistry, Mathematics and Biology को हिन्दी, अंग्रेजी विषयों से अधिक महत्त्व दिया जाता है।

माना $\overline{X}w =$ भारित समान्तर माध्य

$\Sigma w =$ भारों का जोड़

$$\overline{X}w = \frac{\Sigma(W.X)}{\Sigma W}$$

उदाहरण : Calculate weighted mean from the following data

Marks (X)	60	75	63	59	55
Weights (W)	2	1	5	5	3

Solution : -

Marks (X)	Weights (W)	WX
60	2	120
75	1	75
63	5	315
59	5	295
55	3	165
	$\sum W=16$	$\sum WX=970$

$$\overline{X}_W = \frac{\Sigma WX}{\Sigma W}$$

$$= \frac{970}{16}$$

$$= 60.63$$

Remarks

समान्तर माध्य :– इस माध्य की गणना करने के लिए पहले सभी मदों को जोड़ा जाता है तथा इस जोड़ को मदों की कुल संख्या से भाग किया जाता है। इस प्रकार प्राप्त भागफल को समान्तर माध्य कहते हैं

उदाहरण

The Pocket allowances (in Rs.) of ten students are given below:

15, 20, 30, 22, 25, 18, 40, 50, 55 and 65

Calculate the arithmetic mean (समान्तर माध्य) of pocket allowance.

Solution :

Let pocket allowance be denoted by X. Then Arithmetic Mean $\overline{X}$ of N students is given by : -

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

$$\overline{X} = \frac{15+20+30+22+25+18+40+50+55+65}{10}$$

$$\overline{X} = \frac{340}{10} = 34$$

इस प्रकार समान्तर माध्य = 34

उक्त विधि को प्रत्यक्ष विधि (Direct Method) कहते हैं। समान्तर माध्य ज्ञात करने की दूसरी विधि को लघु विधि (Shortcut Method) कहते हैं।

लघु विधि (Shortcut Method):–

जब मदों की संख्या बहुत अधिक हो, तो समान्तर माध्य की गणना लघु विधि द्वारा की जाती है।

माना

X = दिए गए मद

N = मदों की संख्या

A = कल्पित माध्य (Assumed Mean)

$\sum d = \sum (X-A)$

$\overline{X} =$ सामान्तर माध्य

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma d}{N}$$

दिए गए उदाहरण में अगर 40 को Assumed Mean A मान लिया जाए तो

Remarks

Students	Pocket Allowances (X)	A = 40 d = X-A
1	15	15−40 = − 25
2	20	20−40 = − 20
3	30	30−40 = − 10
4	22	22−40 = − 18
5	25	25−40 = − 15
6	18	18−40 = − 22
7	40	40−40 = 0
8	50	50−40 = 10
9	55	55−40 = 15
10	65	65−40 = 25
N = 10		Σd=−60

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma d}{N} = 40 + \frac{(-60)}{10} = 40 - 6 = 34$$

Hence the average Pocket allowance is Rs. 34.

<u>आवृति / बारम्बारता (Frequency) : -</u>किसी मद का बार – बार आना, बारम्बारता कहलाता है।

मद दो तरह से प्रस्तुत किए जा सकते हैं।

(1) खंडित श्रेणी (Discrete Series)

(2) सतत् श्रेणी (Continuous Series)

(1) खंडित श्रेणी मदों के समान्तर माध्य को दो प्रकार विधियों से इस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है

(a) प्रत्यक्ष विधि (b) लघु विधि

(a) प्रत्यक्ष विधि :– $\overline{X} = \frac{\Sigma fX}{N}$

यहां f = आवृति, X = चर, N = मदों की कुल संख्या = Σf

उदाहरण :– Calculate the arithmetic mean from the following data :

Marks (X)	10	20	30	40	50
No. of Students	4	5	3	2	5

Remarks

हल :– (a) Calculation of Arithmetic Mean by Direct Method .

Marks (X)	No. of Students	fX
10	4	40
20	5	100
30	3	90
40	2	80
50	5	250
	N = Σf= 19	ΣfX=560

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{560}{19} = 29.47$$

इस प्रकार Average Marks are 29.47

(b) Calculation of Arithmetic Mean by Shortcut Method : -

Marks (X)	No. of Students (f)	A = 30 d = x −30	f.d
10	4	−20	−80
20	5	−10	−50
A = 30	3	0	0
40	2	+ 10	+ 20
	5	+ 20	+ 100
	Σf = N = 19		Σfd =−10

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fd}{N} = 30 - \frac{10}{19} = 30 - 0.53$$
$$= 29.47$$

(ii) सतत श्रेणी (Continuous Series)

सतत श्रेणी में समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए निम्न में से कोई भी विधि अपनाई जा सकती है। :

(a) प्रतयक्ष विधि (Direct Method)

(b) लघु विधि (Shortcut Method)

(c) पद् – विचलन विधि (Step – Deviation Method)

Remarks

(a) **प्रतयक्ष विधि(Direct Method)**: $\overline{X} = \frac{\Sigma f.m}{N}$

यहां m = विभिन्न वर्गों के मध्य बिन्दु, f = प्रत्येक वर्ग की आवृति,

$N =$ मदों की कुल संख्या

(b) लघु विधि (Shortcut Method)

Arithmetic Mean by Shortcut Method

Marks	No. of Students (f)	Mid- value (m)	A = 25 d = m –A	fd
0–10	20	5	–20	–400
10–20	24	15	–10	–240
20–30	40	25 = A	0	0
30–40	36	35	+ 10	+ 360
40–50	20	45	+ 20	+ 400
	N = 140			Σfd = 120

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fd}{N} = 25 + \frac{120}{140} = 25.85$$

(c) पद् – विचलन विधि (Step – Deviation Method)

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fd^1}{N} xi$$

यहां $d^1 = \frac{m-A}{i}$, m = वर्ग का मध्य, i = वर्ग का आकार, A = कल्पित माध्य

Marks	Mid – Value	f	A = 25 d = m – 25	$d^1 = \frac{d}{10}$	fd^1
0–10	5	20	–20	– 2	– 40
10–20	15	24	–10	– 1	– 24
20–30	A =25	40	0	0	0
30–40	35	36	+ 10	+ 1	+ 36
40–50	45	20	+ 20	+ 2	+ 40
		N=140			Σfd^1=12

Remarks

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fd^1}{N} xi = 25 + \frac{12}{140} \times 10 = 25.85$$

गणना प्रक्रिया (Steps for Calculation)

(i) सबसे पहले प्रत्येक वर्ग Mid value 'm' की निकाली जाएगी

(ii) प्रत्येक mid value को उसकी corresponding frequency (f) से गुणा करके Σfm निकालना है।

(iii) Σfm को Σf = N से भाग देकर हमें समान्तर माध्य प्राप्त होगा

उदाहरण : Calculate the arithmetic mean from the following data :

Marks	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
No. of Students	20	24	40	36	20

Solution : -

Calculation of Arithmetic Mean by Direct Method

Marks	*f*	Mid- value (m)	*f*m
0−10	20	$\frac{0+10}{2} = 5$	100
10−20	24	$\frac{10+20}{2} = 15$	360
20−30	40	$\frac{20+30}{2} = 25$	1000
30−40	36	$\frac{30+40}{2} = 35$	1260
40−50	20	$\frac{40+50}{2} = 45$	900
	N = 140		Σfm = 3620

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fm}{N} = \frac{3620}{140} = 25.85$$

हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

यह एक गणीतीय माध्य है। अगर $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots, X_{12}$, एक ऐसी श्रेणी (Series) है जिसमें N मद (items) है। तो

$$\text{Harmonic Mean} = H = \frac{N}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{X_N}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{X_i}}$$

N= मदों की संख्या

Remarks

<u>उदाहरण :–</u> Calculate H.M. of the following series: 2, 4, 7, 12, 19

<u>Solution: -</u>

Calculation of H.M.

X_i	Reciprocal $\left(\frac{1}{X_i}\right)$
2	$\frac{1}{2} = 0.5$
4	$\frac{1}{4} = 0.25$
7	$\frac{1}{7} = 0.1429$
12	$\frac{1}{12} = 0.083$
19	$\frac{1}{19} = 0.0526$
N=5	$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i} = 1.0288$

$$H.M = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{X_i}} = \frac{5}{1.0288} = 4.86$$

<u>गुणोतर माध्य (Geometric Mean)</u>

यह एक गणितीय माध्य है। अगर $X_1, X_2, X_3, ..., X_N$ एक ऐसी श्रेणी है जिमसें N चर/मद हैं तो

$$G.M. = (X_1, X_2, X_3, ..., X_N)^{\frac{1}{N}}$$

उदाहरण : अगर श्रेणी में तीन मद (item) 3, 27, 243 हैं

$$G.M. = (3 \times 27 \times 243)^{\frac{1}{3}} = 27$$

यह Individual Series के केस में है।

अगर दी गई Series खंडित श्रेणी (Discrete Series) है तो G.M. is given by

$$G.M. = \left(X_1^{f1}.X_2^{f2}.X_3^{f3}............X_n^{fn}\right)^{\frac{1}{N}}$$

यहां $N = f_1+f_2+f_3+f_4+ .... + f_n$ है।

or $N = \sum_{i=1}^{n} fi$

Note : जब गणना लम्बी करनी हो तो हम आसान बनाने के लिए Logarithm का प्रयोग कर सकते हैं।

Remarks

We can write $G.M = Anti\log\left[\frac{\Sigma f.(LogX)}{N}\right]$

उदाहरण : **Calculate G.M. of the following series :-**

X	2	3	4
F	2	3	5

Solution :-

X	f	x^f
2	2	$2^2 = 4$
3	3	$3^3 = 27$
4	5	$4^5 = 1024$
	$N = \sum f = 10$	

$$G.M. = (2^2 \times 3^3 \times 4^5)^{\frac{1}{10}} = (110592)^{\frac{1}{10}}$$

अत: $\log\ G.M = \log\ (110592)^{\frac{1}{10}} = \frac{1}{10}\ \log(110592)$

$$= \frac{1}{10}[5.0437] = 0.50437$$

Taking Antilogarithm both side :

G.M. = Anti (0.50437)

or G.M. = 3.195

उदाहरण : **Calculate the geometric Mean of the data** :

Marks of Students (X)	6	7	8	9	10	11	12
No.of Students (f)	8	12	18	26	16	12	8

Remarks

Solution: -

Calculation of Geometric Mean

X	f	Log x	f. log x
6	8	0.7782	6.2256
7	12	0.8451	10.1412
8	18	0.9031	16.2558
9	26	0.9542	24.8092
10	16	1.0	16.0
11	12	1.0414	12.4968
12	8	1.0792	8.6336
	n = 100		Σf.logx = 94.5622

$$G.M. = Anti\log\left[\frac{\Sigma(f.\text{logx})}{N}\right] = \quad Anti\log\left[\frac{94.5622}{100}\right]$$

= Antilog (0.945622) = 8.822

So, G.M. = 8.822

माध्यका (Median) :– माध्यका केन्द्रीय प्रवृति का एक अन्य महत्त्वपूर्ण माप है। घटते अथवा बढ़ते हुए क्रम में व्यवस्थित श्रेणी के मध्य मूल्य (Middle value) को मध्यका कहा जाता है। मध्यका वह मूल्य है जो पूरी श्रेणी को दो बराबर भागों में बांटता है। इसे से व्यक्त किया जाता है।

माध्यका की गणना :–

<u>व्यकितगत श्रेणी (Individual Series) :–</u>

$$M = size\ of\left(\frac{N+1}{2}\right)th \quad \text{item}$$

यहां, N = श्रेणी में मदों की संख्या

<u>गणना प्रक्रिया (Steps for calculation):</u>

(i) आंकडों को बढ़ते या घटते क्रम में व्यवस्थित किया जाता है।

(ii) $M = \frac{N+1}{2}$ की गणना की जाती है।

(iii) मध्यका मदो का मूल्य या आकार ही मध्यका होती है।

(iv) यदि संख्या विषम (odd) हो तो, श्रेणी का मध्य मूल्य (Middle value) ही मध्यका होगी।

(v) यदि संख्या सम (even) हो तो दो मध्य मूल्यों का समान्तर माध्य (Arithmetic Mean of the two middle values) मध्यका कहलायेगी।

Remarks

उदाहरण :— **Calculate the Median of the data :**

200, 217, 317, 264, 296, 282, 317, 299

Solution : - सबसे पहले data को बढ़ते क्रम (ascending order) में लिखा गया :

Sr. No.	Items (X)
1	200
2	217
3	264
4	282
5	296
6	299
7	316
8	317
N = 8	

यहां N = 8 सम संख्या है

$$\therefore M = \text{ size of } \left(\frac{8+1}{2}\right)\text{th item}$$

$$= \text{size of 4.5th item}$$

$$= \frac{\text{size of 4th item + size of 5th item}}{2}$$

$$\therefore \text{ M} = \frac{282+296}{2} = \frac{578}{2} = 289$$

$$\therefore M = 289$$

<u>खण्डित श्रेणी (Discrete Series):-</u>

Calculate the Median for the following data :

Age	20	25	30	35	40	45	50
No. of Employees	3	5	7	4	2	3	2

Remarks

Solution :-

Age (X)	No. of Employees	c.f.
20	3	3
25	5	8
30	7	15
35	4	19
40	2	21
45	3	24
50	2	26
	N = 26	

Now $\frac{N+1}{2}=\frac{26+1}{2}=13.5$

The relevant cummulative frequency (c.f.) which is just higher than 13.5 is 15. So the median is 30.

<u>अखंडित श्रेणी / सतत् श्रेणी (Continuous Series):-</u>

इस श्रेणी में मध्यका को ज्ञात करने का सूत्र इस प्रकार है :–

$$M=\ell_1+\left(\frac{\frac{N}{2}-c.f.}{f}\times i\right)$$

यहां M = मध्यका (Median)

ℓ_1 = मध्यका वर्ग की निचली सीमा

i = मध्यका वर्ग का विस्तार ($\ell_2-\ell_1$)

f = मध्यका वर्ग की आवृति (frequency)

$\frac{N}{2}$ = मध्यका संख्या (Middle item)

c.f = मध्यका वर्ग से ठीक पहले की संचयी आवृति (ठीक पहले की सारी आवृतियों का जोड़)

<u>गणना प्रक्रिया</u>

(i). सर्वप्रथम संचय आवृति कॉलम तैयार किया जताा है।

(ii). इसके बाद $M = size$ of $\left(\frac{N}{2}\right)th$ item निकाला जाता है।

(iii). मध्यका वर्ग का निर्धारण किया जाता है, जिसमें मध्यका स्थित होती है।

(iv). उपरोक्त सूत्र में सभी प्रतिस्थापित करके मध्यका निकाला जाता है।

Remarks

उदाहरण :– Calculate Median from the following data :-

Marks	0 - 5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
No. of Students	6	12	17	30	10	10	8	5	2

Solution :-

Marks (x)	f	c.f.
0 – 5	6	6
5 – 10	12	18
10 – 15	17	35
15 – 20	30	65
20 – 25	10	75
25 – 30	10	85
30 – 35	8	93
35 – 40	5	98
40 – 45	2	100

Median item = size of $\left(\frac{N}{2}\right)th$ item = $\frac{100}{2}th = 50^{th}$ item. Here 50^{th} item lies in class 15-20 which is the median class. Now put values in

$$M = l_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - c.f.}{f} x_i\right)$$

$$\Rightarrow \qquad M = 15 + \left(\frac{50-35}{30} \times 5\right) = 15 + \frac{15}{30} \times 5 = 17.5$$

Hence M = 17.5

बहुलक (Mode) :–

बहुलक किसी श्रेणी के उस मूल्य को कहते हैं जो श्रेणी में सबसे अधिक बार आता है।

Calculation of Mode :

(i) **व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series) :-**

उदाहरण : दस विद्यार्थियों के द्वारा प्राप्तांक का बहुलक ज्ञात करो

60, 50, 55, 60, 62, 64, 60, 47, 52, 61

Remarks

<u>हल :</u> क्योंकि उक्त वितरण में 60 की आवृति 3 है जो दूसरे मदों से ज्यादा है। इसलिए इस वितरण का बहुलक 60 है।

(ii) **<u>खंण्डित श्रेणी (Discrete Series) :-</u>**

<u>उदाहरण : Calculation the Mode of the given Data :</u>

Marks (X)	20	40	41	42	45	49	50	55	60	65	69	70
No. of Students (f)	1	2	1	1	5	2	1	1	1	1	1	3

<u>Solution :-</u> क्योंकि 45 Marks सबसे ज्यादा 5 Students के हैं। इसलिए उक्त वितरण का बहुलक 45 है।

(iii) **<u>अखण्डित/सतत श्रेणी (Continuous Series) :-</u>**

Calculation की क्रिया विधि :

(a) सर्वप्रथम बहुलक वर्ग (Modal Class) का पता लगाया जाता है।

(b) बहुलक वर्गान्तर का निर्धारण करने के बाद बहुलक का मूल्य निम्न सूत्र से पता लगाया जाता है:

$$Z = \ell_1 + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0} x_i \right)$$

यहाँ Z = बहुलक (mode)

ℓ_1 = बहुलक वर्ग (Modal class) की निचली सीमा (Lower limit)

f_1 = बहुलक वर्ग की आवृति (frequency)

f_0 = बहुलक वर्ग से तुरन्त पहले वर्ग की आवृति

f_2 = बहुलक वर्ग से तुरन्त बाद वाले वर्ग की आवृति

i = बहुलक वर्ग का विस्तार

उदाहरण : Calculate the mode from the follwing data:

Wages (in Rs.)	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30	30 – 35
No. of Workers	3	7	15	30	20	10	5

Solution : - Modal clase is 15 – 20 due to highest frequency.

So, $$Z = \ell_1 + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0} x_i \right)$$

$\ell_1 = 15$, $f_1 = 30$, $f_0 = 15$, $f_2 = 20$, $i = 5$

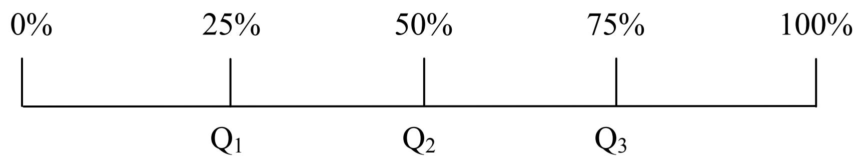
Remarks

Putting Values : -

$$Z = 15 + \left(\frac{30-15}{2(30)-15-20} \times 5 \right) = 15 + \frac{15}{25} \times 5 = 18$$

Hence the mode = 18.

<u>चतुर्थक (Quartile) :–</u> चतुर्थक से अभिप्राय वितरण के उन मानों से है जो वितरण को चार बराबर भागों में बांटते हैं। चतुर्थक तीन होते हैं जिन्हें Q_1, Q_2 और Q_3 से व्यक्त किया जाता है। इन्हे रैखिकीय रूप से निम्न प्रकार से दर्शाया जाता है।



Q_1 को निम्न चतुर्थक (Lower Quartile), Q_2 को द्वितीय चतुर्थक (Second Quartile) तथा Q_3 को तीसरा चतुर्थक (Third Quartile) कहते हैं। Q_2 वितरण को ठीक दो भागों में बांटता है। इसे ही माध्यका (Median) कहते हैं। Q_1, Q_2 तथा Q_3 पूरे वितरण को क्रमशः 25%, 50% व 75% मदों के विभाजित करते हैं।

<u>दशमक (Deciles) :–</u> यह पूरी श्रेणी को दस बराबर भागों में बाँटते है। ये नौ होते हैं जिन्हें D_1, D_2, D_3, ..., D_9 से व्यक्त किया जाता है। D_9 को नवम दशमक (Ninth Decile) कहते हैं जो श्रेणी की 90% मदों को शामिल करते हैं।

<u>शतमक (Percentiles) :–</u> शतमक पूरी श्रेणी को 100 बराबर भागों में बाँटते है। ये 99 होते हैं जिन्हें P_1, P_2, P_3, ..., P_{98}, P_{99} से व्यक्त किया जाता है। P_{50} शतमक मध्यका को व्यक्त करता है। पूरी श्रेणी के पहले 1% को P_1, 2% को P_2, 3%को P_3 , ..., 99%को P_{99} क्रमशः विभाजित करते हैं।

<u>चतुर्थक, दशमक तथा शतमक की गणना (Calculation of Quartiles Deciles and Percentiles)</u>

इनकी गणना निम्न प्रकार से होती है :–

Remarks

For Individual and Discrete Series	For Continuous Series	Formula used for Continuous Series
Q_1 = Size of $\left(\frac{N+1}{4}\right)th$ item	Q_1 = Size of $\frac{N}{4}th$ item	$Q_1 = \ell_1 + \left(\frac{\frac{N}{4} - C.f.}{f} x_i\right)$
Q_3 = Size of $\frac{3(N+1)}{4}th$ item	Q_3 = Size of $\frac{3N}{4}th$ item	$Q_3 = \ell_1 + \left(\frac{\frac{3}{4}N - C.f.}{f} x_i\right)$
D_1 = Size of $\frac{N+1}{10}th$ item	D_1 = Size of $\frac{N}{10}th$ item	$D_1 = \ell_1 + \left(\frac{\frac{N}{10} - C.f.}{f} x_i\right)$
D_9 = Size of $\frac{9(N+1)}{10}th$ item	D_9 = Size of $\frac{9N}{10}th$ item	$D_9 = \ell_1 + \left(\frac{\frac{9N}{10} - C.f.}{f} x_i\right)$
P_1 = Size of $\frac{N+1}{100}th$ item	P_1 = Size of $\frac{N}{100}th$ item	$P_1 = \ell_1 + \left(\frac{\frac{N}{100} - C.f.}{f} x_i\right)$
P_{99} = Size of $\frac{99N+1}{100}th$ item	P_{99} = Size of $\frac{99N}{100}th$ item	$P_{99} = \ell_1 + \left(\frac{\frac{99N}{100} - C.f.}{f} x_i\right)$

<u>उदाहरण : Calculate Median, Quartiles, 6th decile and 70th Percentrile from the data.</u>

Marks	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
No. of Students	5	8	7	12	28	20	10	10

<u>Solution : -</u>

Marks	f	Commulative frequency (c.f.)
0 –10	5	5
10 – 20	8	13
20 – 30	7	20
30 – 40	12	32
40 – 50	28	60
50 – 60	20	80
60 – 70	10	90
70 – 80	10	100
	N – 100	

Remarks

Median = $Size$ of $\frac{N}{2} th$ item

$$= \frac{100}{2} = Size \text{ of 50th item}$$

Median lies in the class 40 – 50

So $$M = \ell_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - c.f.}{f} x_i \right) = 40 + \left(\frac{50-32}{28} \times 10 \right)$$

M = 46.42

Median is called Q_2. So Q_2 = M = 46.42.

$$Q_1 = \text{ Size of } \frac{N}{4} th \text{ item} = \frac{100}{4} = 25th \text{ item}$$

So, Q_1 lies in the calss 30 – 40

$$Q_1 = \ell_1 + \left(\frac{\frac{N}{4} - c.f.}{f} x_i \right) = 30 + \left(\frac{25-20}{12} \times 10 \right) = 34.16$$

$$Q_3 = \text{ Size of } \frac{3N}{4} th \text{ item} \qquad = \frac{3 \times 100}{4} = 75th \text{ item}$$

So, Q_3 lies in the class 50 – 60

$$Q_3 = \ell_1 + \left(\frac{\frac{3N}{4} - c.f.}{f} x_i \right) = 50 + \frac{75-60}{20} \times 10 = 57.5$$

$$Q_6 = \text{ Size of } \frac{6N}{10} th \text{ item} = \frac{6 \times 100}{10} = 60th \text{ item}$$

So, Q_6 lies in the class 40 – 50

$$Q_6 = \ell_1 + \left(\frac{\frac{6N}{10} - c.f.}{f} x_i \right) = 40 + \frac{60-32}{28} \times 10 = 50$$

$$P_{70} = \text{ Size of } \frac{70N}{100} th \text{ item} = \frac{70 \times 100}{100} = 70th \text{ item}$$

P_{70} lies in the class 50 – 60

Remarks

$$P_{70} = \ell_1 + \left(\frac{\frac{70N}{100} - c.f.}{f} x_i \right) = 50 + \frac{70-60}{20} \times 10 = 55$$

<u>प्रवृति की जाँच :–</u>

Q1. केन्द्रीय प्रवृति कितने प्रकार की होती है ?

Q2. अधिकतम आवृति वाली संख्या केन्द्रीय प्रवृति के किस माप को प्रदर्शित करती है ?

Q3. माध्य व माध्यिका ज्ञात होने पर बहुलक की गणना किस प्रकार की जा सकती है ?

Q4. समान्तर माध्य के विचलको का जोड़ क्या होता है ?

Q5. समानान्तर माध्य का सूत्र बताओ।

<u>उत्तर :</u>

1. 3
2. बहुलक
3. $Z = 3M - 2\bar{x}$
4. शून्य
5. $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$

Remarks

Unit – II

MEASURES OF DISPERSION

परिचय : जब हम किसी श्रेणी का माध्य निकलते हैं तो, यह माध्य श्रेणी के विभिन्न मदों (items) की केन्द्रीय प्रवृति को दिखाता है। इससे श्रेणी के विभिन्न मदों का आपस में अन्तर का पता नहीं चलता। कई श्रेणीयों की औसत (Average) समान होती है। लेकिन इनकी रचनाओं में बहुत असमानताएं पाई जाती है।

अपकिरण के माप (Measure of Dispersion) से यह पता चलता है कि किस सीमा तक मदें एक – दूसरे से तथा औसत से भिन्न (Different) हैं।

अपकिरण का अर्थ (Meaning of Dispersion) :–

इसका अर्थ मदों का औसत से विखराव या विचलन है। (Dispersion refers to the degree of variation of the items around on average)

अपकिरण की परिभाषा (Deffinition of Dispersion)

1. डॉ० बाउले के अनुसार, '' अपकिरण मदों के विचरण का माप है।''
2. कौनर के अनुसार, ''व्यक्तिगत मदों के मूल्य में भिन्नता की सीमा को अपकिरण कहते हैं।'''

अपकिरण को मापने की विधियां/ढाँचा (Methods of Measuring Dispersion)

1. विस्तार (Range)
2. अन्तर – चतुर्थक विस्तार तथा चतुर्थक विचलन (Interquartile Range and Quartile Deviation)
3. माध्य विचलन (Mean Deviation)
4. मानक विचलन (Standard Deviation)

1. विस्तार (Range)

किसी श्रेणी के सबसे बड़े मूल्य और सबसे छोटे मूल्य के अन्तर को विस्तार (Range) कहते हैं।

$$R = L - S$$

यहां R = विस्तार (Range)

L = सबसे बड़ा मूल्य

S = सबसे छोटा मूल्य

जब किन्ही दो या अधिक श्रेणियों की बनावट या अपकिरण (Dispersion) का तुलनात्मक अध्ययन करना हो, तब विस्तारगुणंक (Coefficient of Range) ज्ञात किया जाता है। इसका सूत्र निम्न है :

$$\text{Coefficient of Range} = \frac{L-S}{L+S}$$

Examples on Calculation of Range: →

Remarks

1. व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series) : -

उदाहरण : Find the Range and Coeff. of Range of five students obtained the following marks. 20, 35, 25, 30, 15

हल (Solution) : - उक्त श्रेणी में

L = 35, S = 15

Range = L – S = 35 – 15 = 20

$$\text{Coeff. of Range} = \frac{L-S}{L+S} = \frac{35-15}{35+15} = \frac{20}{50} = +\ 0.40$$

खण्डित श्रेणी :– (Discrete Series): -

उदाहरण – Find the range and coefficient of Range from

Marks	10	20	30	40	50	60	70
No. of Students	15	18	25	30	16	10	9

हल :– Here, L = 70 and S = 10

Range = L – S

= 70 – 10 = 60

$$\text{Coefficient of Range} = \frac{L-S}{L+S} = \frac{70-10}{70+10} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4} = +\ 0.75$$

सत्‌त श्रेणी (Continuous Series) : -

Example: Find out Range and Coefficient of range of the data:

Size	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
Frequency	4	9	15	30	40

Solution: - Range = L – S
= 30 – 5 = 25

$$\text{Coeff. of Range} = \frac{L-S}{L+S} = \frac{30-5}{30+5} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$$

अन्तर चतुर्थक विस्तार (Interquartile Range) : -

किसी श्रेणी के ऊपरी चतुर्थक Q_3 तथा निम्न चतुर्थक Q_1 का अन्तर चतुर्थक विस्तार (Interquartile Range) कहलाता है।

Interquartile Range = $Q_3 - Q_1$

चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation) : -

$$\text{Quartile Deviation} = \text{Q. D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Remarks

इसे Semi-Interquartile Range भी कहते हैं।

चतुर्थक विचलन के सापेक्ष माप, जिसे चतुर्थक विचलन गुणांक (Coefficient of Quartile Deviation) कहते है, को ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है।

$$\text{Coefficient of Q. D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

माध्य विचलन (Mean Deviation)

माध्य विलचन अपकिरण का एक महत्त्वपूर्ण माप है। यह माध्य से सभी मदों के विचलन की औसत है। माध्य विचलन के औसत माध्य या माध्यिका से विचरण ज्ञात कर प्राप्त किया जा सकता है। इसको ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है :–

$$\text{M. D.} = \frac{\Sigma|X - M|}{N}$$

यहां, $|X - M|$ का मतलब यहाँ विचलन के निरपेक्ष माप से है। M (माध्य), Arithmatic Mean या माध्यिका हो सकता है। आवृति वितरण में माध्य विचलन निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है :–

$$\text{M. D.} = \frac{\Sigma f|X - M|}{N}$$

Where $N = \sum f$

उदाहरण :– Calculate the mean deviation from median and mean and their coefficients from the table :

X :	20	30	40	50	60	70
F :	8	12	20	10	6	4

Solution : -

(i) Calculation of Mean Deviation from Median

X	F	C. F.	M = 40 $\lvert dM\rvert = \lvert X - M\rvert$	f. $\lvert dM\rvert$
20	8	8	20	160
30	12	20	10	120
40	20	40	0	0
50	10	50	10	100
60	6	56	20	120
70	4	60	30	120
	N = 60			$\sum f\lvert dM\rvert = 620$

Remarks

M = Size of $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ th item = size of $\left(\frac{60+1}{2}\right)$th item

= Size of 30.5 th item = 40

M.D. from median = $\frac{\Sigma\ f.|\text{dm}|}{N} = \frac{620}{60} = 10.33$

coefficient of M.D. from median = $\frac{M.D}{M} = \frac{10.30}{40} = 0.258$

(ii). Calculation of M.D. from mean

X	F	f_x	$\overline{X} = 41$ $\lvert d\overline{x}\rvert = \lvert X - \overline{x}\rvert$	f. $\lvert d\overline{x}\rvert$
20	8	160	21	168
30	12	360	11	132
40	20	800	1	20
50	10	500	9	90
60	6	360	19	114
70	4	280	29	116
N = 60		$\sum$fx = 2460		$\Sigma f\lvert d\overline{x}\rvert = 640$

$\overline{X} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{2460}{60} = 41$

M.D. from Mean = $= \frac{\Sigma f\lvert d\overline{x}\rvert}{N} = \frac{640}{60} = 10.67$

Coefficient of M.D. from Mean = $= \frac{M.D.}{\overline{x}} = \frac{10.67}{41} = 0.26$

मानक विचलन (Standard Deviation)

यह एक महत्त्वपूर्ण माप है। इसे विचलन वर्ग माध्य मूल भी कहा जाता है। प्रमाप विचलन समान्तर माध्य से लिए गए विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल है। इसे σ से व्यक्त करते है और इसका सूत्र निम्न है :

Remarks

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{N}} \qquad \text{यहां } N = \sum f$$

प्रमाप विचलन का साक्षेप माप (Relative Measure) जिसे प्रमाप विचलन गुणांक कहते हैं।

Coefficient of S.D. = $\frac{\sigma}{\bar{x}}$

उदाहरण :– Calculate the standard deviation from the table :

X = 16, 20, 18, 19, 20, 20, 28, 17

Solution : - Calculation of S.D.

X	$\bar{X} = 19.75$ $(X-\bar{X})$	$(X-\bar{X})^2$
16	−3.75	14.06
20	0.25	0.062
18	−1.75	3.0625
19	−0.75	0.5625
20	0.25	0.0625
20	0.25	0.0625
28	8.25	68.0625
17	−2.75	7.5625

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{158}{8} = 19.75$$

$$\Sigma X = 158,\ \Sigma\left(X-\bar{X}\right)^2 = 93.497$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{N}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{93.497}{8}} = 11.687$$

प्रगति की जांच :

1. प्रमाप विचलन की गणना किस सूत्र के द्वारा की जा सकती है ?
2. अपकिरण का कौन–सा माप श्रेणी के सभी मदों पर आधारित होता है ?

Remarks

3. विचरण गुणांक का सूत्र बताइए ?
4. चतुर्थक विचलन में श्रेणी के कितने प्रतिशत मान सम्मिलित होते हैं ?
5. मानक विचलन की गणना किसकी सहायता से की जाती है ?

उत्तर

1. $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N-1}}$
2. प्रमाप विचलन
3. $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$
4. श्रेणी के केन्द्रीय 50 प्रतिशत मद
5. समानान्तर माध्य या माध्यिका से

Remarks

Unit – III

INDEX NUMBER

Contents : →

ईकाई के उद्देश्य : –

- विभिन्न सूचकांकों की गणना करना।
- अर्थशास्त्र में सूचकांकों के महत्त्व की व्याख्या करना
- सूचकांकों की उपयोगिता की व्याख्या करना।

ढाँचा

- सूचकांकों के उपयोग
- कीमत सूचकांक
- सूचकांको के निर्माण में समस्या
- लैस्पियर सूचकांक
- पाश्च्य सूचकांक
- फिशर सूचकांक

Remarks

भूमिका :— सूचकांक वे युक्तियां हैं जो काल, भौगोलिक स्थान अथवा कुछ अन्य अभिलक्षण से संबन्धित तत्व में परिवर्तन का मापन करती है। सूचकांकों को बैरोमीटर के रूप से माना जाता है जो घटनाओं के स्तर में परिवर्तनों का मापन करते हैं।

सूचकांक (Index Number) :— सूचकांक से अभिप्राय उन मापों से है जो विभिन्न चरों (Variables) जैसे : कीमत, उत्पादन, आयात, निर्यात आदि के आकार में परिवर्तन को मापते हैं। यदि हम एक ही चर में परिवर्तन को मापते हैं तो हम वृद्धि दर की गणना करके बढ़ोतरी या कमी को माप सकते हैं। परन्तु यदि हम बहुत सारे चरों में एक विशेष समय के दौरान औसतन परिवर्तन को मापना चाहते हैं तो हमें सूचकांकों को सहारा लेना पड़ता है। उदाहरण के लिए कीमत सूचकांक एक से ज्यादा वस्तुओं की कीमतों में हुई औसत वृद्धि या कमी को मापता है। जिससे हमें यह पता चलता है कि औसत तौर पर हमें कितना अधिक धन खर्च करने की जरूरत है यदि वस्तुओं की कीमत में औसत रूप से वृद्धि हुई है। वस्तुओं के महत्त्व के आधार पर कुछ वस्तुओं की सूचकांक में दूसरी वस्तुओं की अपेक्षा ज्यादा भार दिया जा है। अतः सूचकांकों को भारित माध्य भी कहा जाता है।

सूचकांको के निर्माण में समस्या :— सूचकांक विभिन्न आर्थिक अभिकर्त्ताओं (economic agents) जैसे सरकार उत्पादक उपभोक्ता आदि का मार्गदर्शन करते हैं। अतः ये सूचकांक आर्थिक निर्णय लेने में मद्दगार साबित होने चाहिए। एक अच्छे सूचकांक का निर्माण करने में कई समस्याओं का सामना करना पड़ता है, इनका संक्षिप्त विवरण निम्न प्रकार से है :

1. **वस्तुओं के चयन की समस्या** :— सूचकांक का निर्माण करते वक्त सबसे प्रमुख समस्या वस्तुओं के चयन की है अर्थात् कौन – कौन सी वस्तुओं को इसमें शामिल किया जाए। यह एक अत्यन्त महत्त्वपूर्ण समस्या है। उदाहरण के लिए जैसे उपभोक्ता कीमत सूचकांक का निर्माण करने के लिए किन–किन उपभोक्ता वस्तुओं को शामिल किया जाए। इस संदर्भ में विभिन्न उपभोक्तओं की राय अलग – अलग हो सकती है।

2. **वस्तुओं के भार की समस्या** :— विभिन्न वस्तुओं का महत्त्व विभिन्न उपभोक्ताओं के लिए अलग – अलग होता है। अब यदि सभी वस्तुओं के समान महत्त्व दिया जाये तो यह न्यायोचित नहीं होगा क्योंकि कुछ वस्तुएं अधिक महत्त्व वाली होती हैं तथा कुछ कम महत्त्व वाली। उदाहरण के लिए कीमत सूचकांक में नमक व वातानुकूलित बस किराए को एक समान भार देना उपभोक्ताओं को मान्य नहीं होगा। इसका कारण यह है कि नमक एक अनिवार्य वस्तु है व सभी श्रेणियों के उपभोक्ता इसकी कीमत से प्रभावित होते है परन्तु वातानुकूलित बस में केवल चुनिंदा उपभोक्ता ही सफर करते हैं। अतः वस्तुओं के महत्त्व व उपभोक्ताओं की संख्या में आधार पर ही भार सम्बन्धी निर्णय लिया जाना चाहिए।

3. **आधार वर्ष के चुनाव की समस्या** :— प्रत्येक सूचकांक का निर्माण करते वक्त आधार वर्ष का चुनाव एक अति महत्त्वपूर्ण सोपान है। क्योंकि आधार वर्ष की कीमतों के आधार पर ही चालू वर्ष कीमतों की तुलना की जाती है। अब यदि आधार वर्ष का चुनाव गलत हुआ है तो हमारी तुलना सही नहीं कही जाएगी। उदाहरण के लिए यदि किसी वर्ष विशेष की कीमतों में अत्याधिक वृद्धि हुई है तो उस वर्ष को आधार वर्ष नहीं लिया जा सकता नहीं तो भ्रामक परिणाम प्राप्त होंगे। अतः किसी समान वर्ष जिसमें कीमत, उत्पादन आदि में केवल सामान्य वृद्धि ही हुई है को ही आधार वर्ष माना जाना चाहिए।

4. **आधार वर्ष की गणना की विधि** :— आधार वर्ष की गणना की विधि का चुनाव भी एक महत्त्वपूर्ण चुनौती है। आधार वर्ष के गणना की विभिन्न विधियां हैं जो गणितीय रूप में एक दूसरे से भिन्न है। उदाहरण के लिए लैस्पियर की विधि आधार वर्ष की मात्रा की भार के रूप में शामिल करती है जबकि पाशे की विधि चालू वर्ष की मात्रा को वस्तुओं के भार के रूप में महत्त्व देती है।

अतः हमें उस विधि का चुनाव करना चाहिए जो हमारी उद्देश्यों की पूर्ति करने में सक्षम है। सूचकांकों की विधियों के परिक्षण के लिए कुछ कसौटियां हैं उनकी चर्चा करने से पहले हम निम्न सूचकांको को परिभाषित करेंगे

1. लैस्पियर सूचकांक (Lespeyres Index)
2. पाशे सूचकांक (Paasche Index)
3. फिशर सूचकांक (Fisher Index)

<u>लैस्पियर सूचकांक विधि (Lespeyres Index) :–</u>

इस विधि अनुसार सूचकांक की गणना करते वक्त आधार वर्ष की मात्रा की भार के रूप में शामिल किया जाता है। इसे ज्ञात करने का सूत्र निम्न है :

$$Lp_{01} = \frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \times 100$$

यहां q_0 = आधार वर्ष में मात्रा

P_0 = आधार वर्ष में कीमत

P_1 = चालू वर्ष की कीमत

पाशे का सूचकांक (Paasche Index) :–

पाशे के सूचकांक के अनुसार चालू वर्ष की मात्रा को भार के रूप में शमिल किया जाता है अर्थात :

$$Pp_{01} = \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1} \times 100$$

q_1 = चालू वर्ष में मात्रा

P_1 = चालू वर्ष की कीमतें

P_1 = आधार वर्ष की कीमतें

फिशर का सूचकांक (Fisher Index) :–

यह सूचकांक लेस्पियर सूचकांक तथा पाशे सूचकांक दोनों का संशोधित रूप है। वास्तव में यह लेस्पियर तथा पाशे का गुणोत्तर माध्य है।

$$Fp_{01} = \left(\sqrt{Lp_{01} \times Pp_{01}}\right) \times 100$$

$$or\ Fp_{01} = \left(\sqrt{\frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \times \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1}}\right) \times 100$$

फिशर द्वारा वर्णित उपरोक्त रूप से स्पष्ट है कि इसमें आधार वर्ष तथा चालू वर्ष दोनों को ही भार के रूप में शामिल किया जाता है।

सूचकांको का परीक्षण :– उपरोक्त वर्णित सूचकांको से स्पष्ट है कि हम सूचकांकों का निर्माण विभिन्न विधियों के द्वारा कर सकते हैं। लैस्पियर सूचकांक में आधार वर्ष के मात्रा के भार के रूप में शामिल किया गया है जबकि पाशे सूचकांक में चालू वर्ष की मात्रा के भार के रूप में महत्त्व दिया गया है। अब

प्रश्न उठता है कि किस सूचकांक को आदर्श माना जाना चाहिए ? किसी भी सूचकांक का चुनाव करने का क्या आधार है ? इन प्रश्नों का उत्तर सूचकांकों के परीक्षणों की कसौटी के आधार पर ही दिया जा सकता है। हम उस सूचकांक को श्रेष्ठ कहेंगे जो परीक्षणों की कसौटी पर खरा उतरता है। इसलिए मुख्य रूप से तीन परीक्षणों का उल्लेख हुआ है। ये तीन परीक्षण निम्नलिखित है : –

1. समय उलट परीक्षण (Time Reversal Test)
2. तत्व उलट परीक्षण (Factor Reversal Test)
3. चक्रीय परीक्षण (Circular Test)

1. समय परीक्षण से अभिप्राय उस स्थिति से है, जिसमें यदि हम आधार वर्ष के आधार पर प्रचलित वर्ष का सूचकांक (P_{01}) ज्ञात किया जाए और फिर प्रचलित वर्ष के आधार पर आधार वर्ष का सूचकांक ज्ञात किया जाए, तो ये दोनों एक दूसरे के उलटे (Reciprocal) होने चाहिए। इसका सूत्र निम्न प्रकार से है :

$$P_{01} = \frac{1}{P_{10}} \qquad or \qquad P_{01} \times P_{10} = 1$$

अगर कोई भी सूचकांक इस शर्त को पूरा करता है तो वह कसौटी पर खरा माना जाएगा अन्यथा सूचकांक परीक्षण को पास नहीं कर पाता। अब हम तीनों सूचकांक का परीक्षण करेंगे।

<u>लैस्पियर (Laspare) के सूचकांक का परीक्षण :–</u>

$$Lp_{01} = \frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \times 100$$

आधार वर्ष व चालू वर्ष के आपसी बदलाव करने पर हमें प्राप्त होता है

$$Lp_{10} = \frac{\Sigma P_0 q_1}{\Sigma P_1 q_1} \times 100$$

परीक्षण अनुसार यदि $Lp_{01} \times Lp_{10}$ एक के बराबर है तो यह परीक्षण की कसौटी पर खरा उतरता है अन्यथा नहीं।

$$Lp_{01} \times Lp_{10} = \frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \times \frac{\Sigma P_0 q_1}{\Sigma P_1 q_1} \neq 1$$

अर्थात् यह समय परीक्षण को संतुष्ट नहीं करता।

पाशे के सूचकांक का परीक्षण :–

क्योंकि $Pp_{01} \times Pp_{10} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0} \neq 1$

अतः यह स्पष्ट है कि लैस्पियर सूचकांक की भांति पाशे का सूचकांक भी इस परीक्षण को उतीर्ण नहीं कर पाता। फिशर का सूचकांक भी इसी तरह से परखा जा सकता है।

Remarks

फिशर के सूचकांक का परीक्षण :–

$$Fp_{01} \times Fp_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}}$$

$$= 1$$

अतः यह स्पष्ट है कि लैस्पियर फिशर सूचकांक इस परीक्षण को उत्तीर्ण कर पाता है।

<u>तत्त्व परीक्षण (Factor Reversal Test)</u>

तत्त्व परीक्षण के अनुसार कीमत सूचकांक व मात्रा सूचकांक का गुणांक मूल्य सूचकांक के बराबर होना चाहिए अर्थात :–

$$V_{01} = P_{01} \times Q_{01}$$

यहां V_{01} = मूल्य सूचकांक $= \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_0} \times 100$

Q_{01} = मूल्य सूचकांक है।

<u>मात्रा सूचकांक (Quantity Index)</u>

मात्रा सूचकांक ज्ञात करने के लिए हम सभी सूचकांको की कीमत व मात्रा को आपस में परिवर्तित कर देते हैं।

अर्थातः

$$L_{Q_{01}} = \frac{\Sigma P_0 Q_1}{\Sigma P_0 Q_0} \times 100$$

$$P_{Q_{01}} = \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_1 Q_0} \times 100$$

$$F_{Q_{01}} = \sqrt{\frac{\Sigma P_0 Q_1}{\Sigma P_0 Q_0} \times \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_1 Q_0}} \times 100$$

अब हम इन तीनों सूचकांकों का तत्त्व परीक्षण करेंगे।

<u>लैस्पियर का सूचकांक :–</u>

$$L_{P_{01}} \times L_{Q_{01}} = \frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma p_0 Q_1} \times \frac{\Sigma P_0 Q_1}{\Sigma P_0 Q_0} \neq V_{01}$$

इसी प्रकार हम पाशे की सूचकांक का परीक्षण कर सकते हैं।

<u>पाशे सूचकांक का परीक्षण :–</u>

$$P_{P_{01}} \times P_{Q_{01}} = \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma p_0 Q_1} \times \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_1 Q_0} \neq V_{01}$$

अतः लैस्पियर की भांति पाशे सूचकांक भी तत्त्व परीक्षण को उत्तीर्ण नहीं कर पाता।

Remarks

<u>फिशर का परीक्षण :–</u>

$$F_{P_{01}} \times F_{Q_{01}} = \sqrt{\frac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_0Q_0} \times \frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_1}} \times \sqrt{\frac{\Sigma P_0Q_1}{\Sigma P_0Q_0} \times \frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_1Q_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_0} \times \frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_0}} = \frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_0} = V_{01}$$

अतः यह मूल्य सूचकांक (V_{01}) के बराबर है व परीक्षण में सफल हो जाता है। हमने देखा कि फिशर का सूचकांक समय व तत्त्व दोनों ही परीक्षणों को संतुष्ट करता है। अतः फिशर सूचकांक को आदर्श सूचकांक कहा जाता है।

<u>चक्रीय परीक्षण (Circular Test)</u>

चक्रीय परीक्षण एक प्रकार से समय परीक्षण का विस्तृत रूप है। इसमें समय अवधि की दो से ज्यादा अवधियों के मध्य व्युत्पन्न क्रम में रख कर परीक्षण किया जाता है। अर्थात् यदि हमारे पास तीन समयवधियों के लिए कीमत सूचकांक है जैसे कि P_{01}, P_{12}, P_{20} तो चक्रीय परीक्षण के अनुसार किसी भी सूचकांक को निम्न शर्त पूरी करनी चाहिए। अर्थात्

$$P_{01} \times P_{12} \times P_{20} = 1$$

कोई भी सूचकांक यदि शर्त पूरी नहीं करता तो उसे चक्रीय परीक्षण की दृष्टि से असफल माना जाएगा। लैस्पियर, पाशे व फिशर सूचकांक ये शर्त पूरी नहीं करते।

<u>उपभोक्ता कीमत सूचकांक व जीवन निर्वाह लागत सूचकांक :–</u>

उपभोक्ता कीमत सूचकांक से अभिप्राय उस सूचकांक से है जिसकी गणना वस्तुओं की कीमतों में सापेक्षिका परिवर्तन को मापते हैं। भारत में विभिन्न उपभोक्ता मूल्य सूचकांको का प्रचलन है। जैसे थोक मूल्य सूचकांक व खुदरा मूल्य सूचकांक। इसी प्रकार जीवन निर्वाह सूचकांक का उद्देश्य जीवन यापन के लिए न्यूनतम आवश्यक खर्च को निर्धारित करना है। समय के साथ – साथ वस्तुओं की कीमतों में परिवर्तन होता है। अगर कीमत स्तर बढ़ता है तो हमारी वास्तविक आय कम हो जाती है। इसका उपभोक्तओं की आर्थिक स्थिति पर प्रतिकूल प्रभाव पड़ता है।

Examples on Index Number :

Example 1 : → Calculate the Simple Price Index using the following data : →

Commodity	Price (Year 2001)	Price (Year 2011)
A	15	25
B	30	45
C	10	23
D	20	33

Remarks

Solution : -

Commodity	Price (Year 2001)	Price (Year 2011)
A	15	25
B	30	45
C	10	23
D	20	33
	$\Sigma P_0 =$ 75	$\Sigma P_1 =$ 126

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} \times 100 = \frac{126}{75} \times 100 = 168$$

Example 2 : → Calculate the Simple Price Index using the following data :

Commodity	Price in \$ (2005)	Price in \$ (year 2012)
A	32	45
B	23	40
C	40	50
D	15	35
E	20	37
F	25	41

Solution : -

Commodity	Price in \$ (2005)	Price in \$ (year 2012)
A	32	45
B	23	40
C	40	50
D	15	35
E	20	37
F	25	41
	$\Sigma P_0 = 155$	$\Sigma P_1 =$ 248

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} \times 100 = \frac{248}{155} \times 100 = 160$$

1. **Simple Average Value Proportion Method : -**

$$P = \Sigma\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$$

$$P_{01} = \frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)}{N}$$

Where N = Sum of all frequencies.

Remarks

2. Use of Geometiric Mean in Value Proportion Method :

$$P_{01} = \text{Antilog}\left(\frac{\Sigma \log P}{N}\right)$$

Where $P = \frac{P_1}{P_0} \times 100$

3. Use of median in value Proportion Method : -

$$P_{01} = \text{Size of}\left(\frac{N+1}{2}\right)$$

Example 3 : - Calculate the Simple Price Index from the data given below using

(a) Simple Average Value Proportion Method
(b) Geometric Mean Value Proportion Method
(c) Median in value Proportion Method

Commodity	A	B	C	D	E
Price in 2000	20	43	40	15	23
Price in 2005	35	67	60	37	56

Solution :-

(a)

Simple Average Method

Commodity	Price in 2000 (P_0)	Price in 2005 (P_1)	Price Relatives $\left(P = \frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$
A	20	35	175.00
B	43	67	$100 \times \frac{67}{43} = 155.81$
C	40	60	$\frac{60}{40} \times 100 = 150.00$
D	15	37	$100 \times \frac{37}{15} = 246.67$
E	23	56	$\frac{56}{23} \times 100 = 243.48$
N = 5			$\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right) = 970.96$

$$P_{01} = \frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)}{N} = \frac{970.96}{5} = 194.16$$

Remarks

(b)

Geometric Mean Value Proportion Method

Commodity	Price in 2000 (P_0)	Price in 2005 (P_1)	Price Relatives $\left(P = \frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$	Log P
A	20	35	175.00	2.243038
B	43	67	155.81	2.192595
C	40	60	150.00	2.176091
D	15	37	246.67	2.392116
E	23	56	243.48	2.386463
N = 5				Σ(Log P) = 11.39

$$P_{01} = \text{Antilog}\left(\frac{\Sigma \log P}{N}\right) = \text{Antilog}\left(\frac{11.39}{5}\right) = 189.70$$

(C)

Using the Median in Value Proportion Method

Commodity	Price in 2000 (P_0)	Price in 2005 (P_1)	Price Relatives $\left(P = \frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$
A	20	35	$\frac{35}{20} \times 100 = 175.00$
B	43	67	$\frac{67}{43} \times 100 = 155.81$
C	40	60	$\frac{60}{40} \times 100 = 150.00$
D	15	37	$\frac{37}{15} \times 100 = 246.67$
E	23	56	$\frac{56}{23} \times 100 = 243.48$

Arranging Relative Price in Descending order

246.67, 243.48, 175.00, 155.81, 150.00

$$P_{01} = \text{Size of} \left(\frac{N+1}{2}\right)\text{th item} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = \text{3rd item} = 175.00$$

Remarks

Example 4 : Calculate Price Index from the given data

Year	Commodity A	Commodity B	Commodity C
2000	2	3	2
2001	3	3	4
2002	1	4	3
2003	6	6	3

Solution :-

Average Price of Commodity A = $\frac{2+3+1+6}{4} = \frac{12}{4} = 3$

Average Price of Commodity B = $\frac{3+3+4+6}{4} = \frac{16}{4} = 4$

Average Price of Commodity C = $\frac{2+4+3+3}{4} = \frac{12}{4} = 3$

Com Mo dity	Aver -age Price	2000		2001		2002		2003	
		P_0	P_R	P_1	P_R	P_2	P_R	P_3	P_R
A	3	2	$\frac{2}{3}\times 100 = 66$	3	$\frac{3}{3}\times 100 = 100$	1	$\frac{1}{3}\times 100 = 33.3$	6	$\frac{6}{3}\times 100 = 200$
B	4	3	$\frac{3}{4}\times 100 = 75$	3	$\frac{3}{4}\times 100 = 75$	4	$\frac{4}{4}\times 100 = 100$	6	$\frac{6}{4}\times 100 = 150$
C	3	2	$\frac{2}{3}\times 100 = 66.6$	4	$\frac{4}{3}\times 100 = 133$	3	$\frac{3}{3}\times 100 = 100$	3	$\frac{3}{3}\times 100 = 100$
Total of Relative Price			208.2		308.3		233.3		450
Price Index			69.4		102.76		77.76		150

Example 5 :- Calculate the Laspeyres, Passche and Fisher Index for the given data :

Commodity	2005		2011	
	Price	Quantity	Price	Quantity
A	3	5	5	3
B	2	3	4	5
C	8	9	9	8
D	5	7	7	9
E	4	6	7	9

Solution :-

Remarks

Commodity	P_0	Q_0	P_1	Q_1	P_0Q_0	P_1Q_0	P_0Q_1	P_1Q_1
A	3	5	5	3	15	25	9	15
B	2	3	4	5	6	12	10	20
C	8	9	9	8	72	81	64	72
D	5	7	7	9	35	49	45	63
E	4	6	7	9	24	42	36	63
					ΣP_0Q_0 =152	ΣP_1Q_0 =209	ΣP_0Q_1 =164	ΣP_1Q_1 =233

Laspeyres Index $= \left(\dfrac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_0Q_0} \times 100\right) = \dfrac{209}{152} \times 100 = 137.5$

Paasche Index $= \left(\dfrac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_1} \times 100\right) = \dfrac{233}{164} \times 100 = 142.07$

Fisher Index $= \left(\sqrt{\dfrac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_0Q_0} \times \dfrac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_1}}\right) \times 100 = \left(\sqrt{\dfrac{209}{152} \times \dfrac{233}{164}}\right) \times 100 = 139.77$

Example 6 : - Calculate the Laspeyres, Paasche and Fisher Index using the data given below. Show that Fisher Index is just the geometric mean of the Laspeyers and Pasche Indices :

Commodity	2004		2014	
	Price (Rs.)	Quantitiy	Price (Rs.)	Quantity
Wheat	12	4	17	5
Petrol	45	3	65	5
Sugar	27	5	34	7
Paper	15	2	25	3
Computer	40	4	50	5

Solution : -

Here Base year (P_0) = 2004

Current year (P_1) = 2014

Remarks

Commodity	P_0	Q_0	P_1	Q_1	P_0Q_0	P_1Q_0	P_0Q_1	P_1Q_1
Wheat	12	4	17	5	48	68	60	85
Petrol	45	3	65	5	135	195	225	325
Sugar	27	5	34	7	135	170	189	238
Paper	15	2	25	3	30	50	45	75
Computer	40	4	50	5	160	200	200	250
					ΣP_0Q_0 =508	ΣP_1Q_0 =683	ΣP_0Q_1 =719	ΣP_1Q_1 =973

Laspeyres Index $= \left(\dfrac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_0Q_0}\times 100\right) = \dfrac{683}{508}\times 100 = 134.45$

Paasche Index $= \left(\dfrac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_1}\times 100\right) = \dfrac{973}{719}\times 100 = 135.33$

Fisher Index

$$= \left(\sqrt{\frac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_0Q_0}\times\frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_1}}\right)\times 100$$

$$= \left(\sqrt{\frac{683}{508}\times\frac{973}{719}}\right)\times 100$$

$$= \left(\sqrt{1.3445\times 1.3533}\right)\times 100 = \sqrt{1.8195}\times 100$$

$$= 1.3489\times 100 = 134.89$$

Geometric Mean of Laspeyres and Passche Indices

$= \sqrt{134.45\times 135.33} = 134.89$

Hence Proved.

प्रगति की जांच

1. सर्वप्रथम सूचकांकों की रचना किसके द्वारा की गई ?
2. सैद्धान्तिक रूप से सूचकांकों की रचना में सर्वोत्तम माध्य कौन–सा है ?
3. कालोत्क्रमण परीक्षण की सन्तुष्टि किस सूत्र की सहायता से होती है ?
4. लैस्पियर का सूचकांक किस पर आधारित होता है ?
5. आदर्श सूचकांक किसको माना जाता है ?

उत्तर :

1. कार्ली (इटली निवासी)
2. गुणोतर माध्य
3. $P_{01}\times P_{10} = 1$
4. आधार वर्ष की मात्रा पर
5. फिशर सूचकांक

Remarks

Unit – IV
TIME SERIES ANALYSIS

इकाई के उद्देश्य :

- काल – श्रेणी के विषय में जानकारी प्रदान करना
- काल – श्रेणी के महत्त्व की विवेचना करना
- काल – श्रेणी के अर्थशास्त्र में उपयोग की विवेचना करना

ढाँचा :

- काल – श्रेणी (Time Series)
- नियमित प्रचलन (Secular Trend)
- चक्रीय उतार – चढ़ाव (Cyclical Trend)
- मौसमीय प्रचलन (Seasonal Trend)
- अनियमित प्रवाह (Irreglar Variations)
- हस्त मुक्त विधि (Free Hand Method)
- गतिमान माध्य विधि (Moving Average)

भूमिका :–

काल – श्रेणी से तात्पर्य ऐसी श्रेणी से है जिसमें एक चर काल होता है। यदि हम आनुक्रमिक काल अवधि में किसी चर के कालानुक्रमिक रूप से मानों को इक्ट्ठा करें, तो यह काल श्रेणी कहलाएगी। ऐसी श्रेणी का विश्लेषण 'काल – श्रेणी विश्लेषण' कहलाता है।

समय श्रेणी विश्लेषण (Time Series Analysis) :

समय श्रेणी से अभिप्राय आर्थिक चरों के समय के संदर्भ में प्रकट करना है। उदाहरण के लिए यदि हम पिछले दस वर्षों की राष्ट्रीय आय को वार्षिक रूप से दर्शाते हैं अथवा एक कंपनी अपनी बिक्री को मासिक रूप से दर्शाती है तो यह समय श्रेणी कहलाएगा। संक्षेप में आर्थिक चरों की वार्षिक, त्रिमासिक मासिक, साप्ताहिक अथवा दैनिक समयाविधि के अनुसार दर्शाया जा सकता है। अब प्रश्न उठता है कि क्या हम समय श्रेणी के आधार पर आर्थिक चरों की भविष्यवाणी करने में सक्षम है अथवा नहीं ? यदि हम समयवधि व आर्थिक चर जैसे आय, उपभोग, निवेश, कीमत, ब्याज दर आदि में कुछ संबंध स्थापित कर सके तो विश्लेषण की दृष्टि से यह अत्यन्त उपयोगी होगा। परन्तु समय व आर्थिक चर में संबंध का पता लगाने के लिए विभिनन समय श्रेणियों का वर्गीकरण आवश्यक है। निवेश विभिन्न समय श्रेणियों के मापने के लिए विभिन्न विधियाँ प्रयोग में लाई जाती है।

समय श्रेणियों का वर्गीकरण :–

समय श्रेणियों का विश्लेषण निम्न प्रकार से किया जा सकता है :

1. नियमित प्रचलन (Secular Trend)
2. चक्रीय उतार चढ़ाव (Cyclical Variations)
3. मौसमीय प्रचलन (Seasonal Trend)

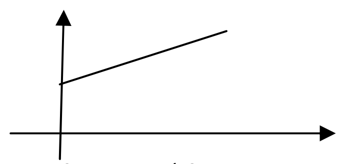
Remarks

4. अनियमित प्रवाह (Irregular Variations)

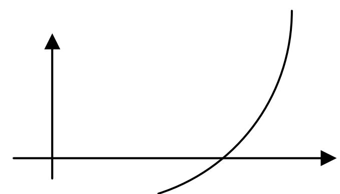
उपरोक्त वर्णित चरों के प्रकार की श्रेणियों की व्याख्या इस प्रकार की जा सकती है :

1. **नियमित प्रचलन :–**

सैद्धान्तिक रूप से नियमित प्रचलनों का सैद्धान्तिक रूप से बहुत अधिक महत्त्व है। सामान्यतः अर्थशास्त्र में विभिन्न चरों को समय के संदर्भ में या तो घटनात्मक या ऋणात्मक रूप से संम्बन्धित दर्शाया जाता है। उदाहरण के लिए जनसंख्या को बढ़ते प्रचलन में दर्शाना। नियमित प्रचलनों के दो प्रकार है :– एक रैखिय व दूसरे गैर रैखिय संबंध। रैखिय रेखा के रूप में दर्शाते हैं। इसके विपरीत गैर रैखिय प्रचलन सीधी रेखा न होकर वकृ के रूप में देखे जा सकते हैं, जैसा कि चित्र संख्या (1) व (2) में दर्शाया गया है।



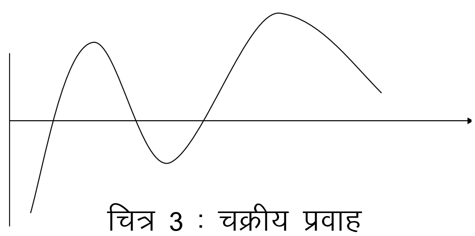
चित्र 1 : रैखिय संबंध



चित्र 2 : गैर रैखिय संबंध

2. **चक्रीय प्रवाह** :–

चक्रीय प्रवाहों से अभिप्रायः उन दीर्घकालीन समय श्रेणियों से है जो आर्थिक क्रियाओं के उतार – चढ़ाव के कारण उत्पन्न होता है। जैसे अर्थव्यवस्थाओं में व्यापार चक्रों का उत्पन्न होना। एक व्यापार चक्रीय समय श्रेणी को रेखाचित्र (3) में दर्शाया गया है।



चित्र 3 : चक्रीय प्रवाह

3. **मौसमीय प्रवाह :–**

मौसमीय प्रवाह से अभिप्राय मौसम के अनुसार आर्थिक चर में होने वाली वृद्धि या कमी से है जैसे गर्मियों के मौसम में शीत पेयजली की व सर्दियों में ऊनी कपड़ों की मांग का बढ़ जाना। इसी प्रकार फसल चक्रीय के फलस्वरूप एकल विशेष उत्पादन का समय के साथ संबंध होना। अतः विशेष रूप से कृषि आधारित अन्य क्षेत्रों में मौसमीय प्रवधि का विद्यमान होना स्वाभाविक प्रक्रिया है।

4. **अनियमित उतार चढ़ाव :–**

अनियमित उतार चढ़ाव से अभिप्राय अर्थव्यवस्था में होने वाले आकस्मिक से अभिप्राय अर्थव्यवस्था में होने वाले आकस्मिक व अनियमित परिवर्तनों से है। उन उतार – चढ़ावों की भविष्यवाणी करना बहुत मुश्किल है। अतः विश्लेषण की दृष्टि से अनियमित उतार चढावों का महत्त्व कम है।

प्रचलनों को मापने की विधियां :–

हम विभिन्न विधियों द्वारा प्रचलनों को माप सकते हैं ताकि हम प्रवाहों के बारे में भविष्यवाणी कर सके। इसे मापने की **मुख्य विधियां निम्नलिखित है :–**

Remarks

(i) अर्द्ध माध्य विधि (Semi Average Method)

(ii) चलन माध्य (Moving Average)

(iii) स्वतन्त्र हस्त विधि (Free Hand Method)

(iv) न्यूनतम वर्ग विधि (Least Sqaure Method)

(i) **अर्द्ध माध्य विधि (Semi Average Method) : -** इस विधि के अनतर्गत पूरी काल श्रेणी के दो भागों में बांटा जा है तथा प्रत्येक श्रेणी के लिए अलग से माध्यमान ज्ञात किए जाते हैं तथा दोनों माध्यमानों को ग्राफ पर दिखाया जाताा है।

(ii) **चलन माध्य (Moving Average)** :– चलन माध्य से अभिप्राय काल श्रेणी के चलन माध्य अर्थात् गतिमान माध्स से है। अर्थात् श्रेणी के मान आर्डर के अनुसार बदलते रहे हैं। उदाहरण के लिए यदि हम 3 आर्डर का चलन माध्य लेते हैं तो पहले तीन मानों का सामान्तर माध्य निकाला जाता है। उसके बाद पहला मान छोड़कर अगले तीन मानों का सामान्तर माध्य निकाला जाता है। इस तरह यह प्रक्रिया काल श्रेणी के अन्त तक दोहराई जाती है।

(iii) **स्वतन्त्र हस्त विधि (Free Hand Method)** :– इस विधि के अन्तर्गत काल श्रेणी के सभी मानों को ग्राफ पर दर्शाया जाता है तथा अपनी विर्नम के आधार पर एक रैखीय वक्र बनाया जाता है। यह रैखीय वक्र इस प्रकार बनाया जाता है कि ग्राफ पर दर्शार्य गए सभी बिन्दु इस वक्र के आस – पास हो। इस विधि का प्रमुख दोष यह है कि अनुसंधान कर्ता का विवेक अगर गलत होता तो हमें काल श्रेणी को सही रूप से मापने में कठिनाई उत्पन्न हो सकती है।

(iv) न्यूनतम वर्ग विधि (Least Sqaure Method) :- इस विधि के अन्तर्गत आश्रित चर को समय चर के एक फलग के रूप में प्रस्तुत किया जाता है तथा आश्रित चर का आकलन मान निकाला जाता है।

न्यूनतम वर्ग विधि में X तथा T (Time) चरों के वास्तविक मानों के आधार पर Y का जोकि T चर पर आश्रित है, आकलन मान (Estimated Value) ज्ञात किया जाता है। इस विधि अनुसार :

$$Y = a + b\,T \qquad \text{(i)}$$

क्योंकि डाटा केवल X व T चरों में दिया गया है। हमें न्यूनतम वर्ग विधि का इस्तेमाल करते हुए, a तथा b का मान ज्ञात करना है जो इस प्रकार है :

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}\,T \qquad \text{(ii)}$$

यहां $\hat{Y} = Y$ चर का आंकलन

$\hat{a}$ व $\hat{b}$ तथा T चर के वास्तविक मानों पर आधारित है। न्यूनतम वर्ग विधि $\hat{a}$ व $\hat{b}$ के मान इस प्रकार ज्ञात करती है कि Y के वास्तविक मान Y तथा आंकलित मान $\hat{Y}$ के विचलन के वर्गों का योग कम से कम होना चाहिए। अर्थात्

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

Taking square and sum both side we get

$$\Sigma e_i^2 = \Sigma(\mathrm{Y_i} - \hat{y}_i)^2$$

$$or \quad \Sigma e_i^2 = \Sigma(\mathrm{y_i} - \hat{a} - \hat{b}\,T)^2 \qquad (iii) \qquad \text{(using ii)}$$

Remarks

अब हम Σe_i^2 को हम (Minimise) करेंगे। अर्थात् $\hat{a}$ व $\hat{b}$ के उन मानों को ज्ञात करे जिसमें कि Σe_i^2 न्यूनतम हो। इसलिए इसे न्यूनतम वर्ग विधि कहा जाता है।

किसी भी फलन को न्यूनतम मान ज्ञात करने के लिए उसका First Derivative निकालते हैं तथा उसे zero के बराबर रखते हैं। अतः Σe_i^2 फलन का $\hat{a}$ व $\hat{b}$ द्वारा First Derivative निकालकर zero के बराबर रखा जाएगा अर्थात्

$$\hat{b} = \frac{N\Sigma TY - \Sigma T\Sigma Y}{N\Sigma T^2 - (\Sigma T)^2}$$

$$and\ \hat{a} = \hat{Y} - \hat{b}\,\overline{T}$$

<u>काल श्रेणी के उदाहरण :–</u>

Example 1 : - The following data on Production is Given :

Year :	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Production:	10	12	16	15	18	19	22	28	34	30

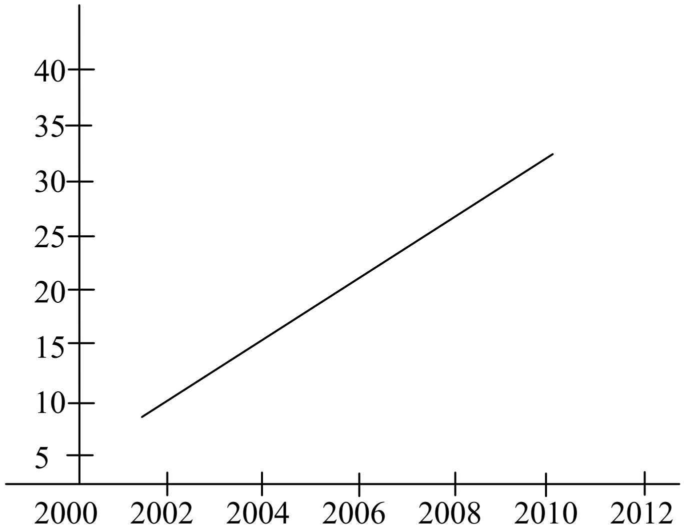
Calculate by the Semi Average method and draw a Trend line on the basis of semi averages.

<u>Solution : -</u> Total ten year data is divided in to two parts of five years each and then average for each of the period is caluclated using average formula :

Year	Produciton	Semitotal	Semi Average
2001	10		
2002	12		
2003	16	71	14.2
2004	15		
2005	18		
2006	19		
2007	22	133	26.6
2008	28		
2009	34		
2010	30		

Remarks

Trend Line Using the Semi – Average Method



Example 2 : - The following Data is given for the cost of a company. Calculate the moving average of order 3

Year :	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Cost (Rs. 000)	6	7	7	10	8	9	10	8	12	12	14

Solution : -

Year	Cost	Seletion of Years	Three Years Moving Total	Moving Average of order 3
2001	6			
2002	7	6+7+7	20	6.67
2003	7	7+7+10	24	8.00
2004	10	7+10+8	25	8.33
2005	8	10+8+9	27	9.00
2006	9	8+9+10	27	9.00
2007	10	9+10+8	27	9.00
2008	8	10+8+12	30	10.00
2009	12	8+12+12	32	10.67
2010	12	12+12+14	36	12.67
2011	14			

Example 3 : - The following data is given for the demand of a firm. Fit a trend line using the Method of Least Square Method

Year	1	2	3	4	5	6	7
Cost	6	8	10	13	15	19	20

Remarks

Solution :-

Year (T_i)	Cost(Y_i)	T_iY_i	T_i^2
1	6	6	1
2	8	16	4
3	10	30	9
4	13	52	16
5	15	75	25
6	19	114	36
7	20	140	49
$\Sigma T_i = 28$	$\Sigma Y_i = 91$	$\Sigma T_i Y_i = 433$	$\Sigma T_i^2 = 140$

$$\hat{b} = \frac{N\Sigma T_i Y_i - \Sigma T_i \Sigma Y_i}{N\Sigma T_i^2 - (\Sigma T)^2}$$

$$\hat{b} = \frac{7 \times 433 - 28 \times 91}{7 \times 140 - (28)^2} = \frac{483}{196} = 2.4642$$

$$\because \hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\ \overline{T}$$

$$\text{Now } \overline{\mathrm{Y}} = \frac{91}{7} = 13 \text{ and } \overline{\mathrm{T}} = \frac{\Sigma T_i}{N} = \frac{28}{7} = 4$$

$$\therefore\ \hat{a} = \overline{\mathrm{Y}} - \hat{b}\ \overline{\mathrm{T}} = 13 - 4 \times (2.4642) = 3.14$$

So the trend line is

$$\hat{Y} = 3.14 + 2.46.\ \mathrm{T}$$

प्रगति की जांच :–

1. मौसमी विचरणों को उत्पन्न करने वाले सबसे महत्त्वपूर्ण कारक कौन से होते हैं ?
2. मौसमी विचरणों को मापने की सबसे व्यापक रूप से प्रयुक्त होने वाली विधि कौन – सी है ?
3. अनियमित विचरण प्रायः किस प्रकार के होते हैं ?

उत्तर :–

1. मौसम और सामाजिक रिति – रिवाज
2. गतिमान माध्य अनुपात विधि
3. आवधिक एवं अनियमित

Unit – V

PROBABILITY

Remarks

Contents : →

Unit – V

प्रायिकता (Probability)

इकाई के उद्देश्य :–

- प्रायिकता के धारणा की जानकारी प्रदान करना।
- प्रायिकता की उपयोगिता जांच करना।
- प्रायिकता के मूल नियमों की जानकारी प्रदान करना।
- सशर्त प्रायिकता की गणना करना।

ढाँचा :–

- प्रायिकता (Probability) की धारणा (concept)
- प्रायिकता के मूल नियम (Basic Rules of Probability)
- सशर्त प्रायिकता (Conditional Probability)
- बेज सिद्धान्त (Bayes's Theorem)

प्रायिकता (Probability) से अभिप्राय किसी घटना के घटने की संभावना से है। जैसे यह कहना कि शायद आज वर्षा हो, उसके आज यहां आने की सम्भावना है इत्यादि। इन वाक्यों से यह स्पष्ट है कि घटना का घटित होना पूर्ण रूप से निश्चित नहीं है। ऐसी घटनाओं को तर्कपूर्ण ढंग से उल्लेख करना ही Probability Theory है। यदि अनिश्चित घटनाओं का घटित होने को अंको में व्यक्त किया जाए तो, उसे Probability कहा जाएगा। उदाहरण के तौर पर अगर कोई व्यक्ति किसी एक Dice को उछालता है और देखता है कि कोई एक नम्बर माना 4 के आने की क्या सम्भावना है। इस सम्भावना के घटित होने को हम अंको द्वारा ज्ञात करते हैं। यह सम्भावना हमें प्रतिशत के रूप में प्राप्त

Remarks

होती है जो 0 और 1 के मध्य होगी। इसे ही किसी घटना के घटित होने की Probability के तौर पर ज्ञात किया जाएगा।

प्रायिकता (Probability) कभी ऋणात्मक (Negative) नहीं होती। यदि प्रायिकता का मूल्य 0 या इसके आसपास आता है तो घटना के घटने की सम्भावना ना के बराबर होती है। इसके विपरित अगर प्रायिकता का मूल्य 1 या इसके छोटा तथा आसपास होता है तो घटना के घटित होने की सम्भावना ज्यादा होती है।

कुछ आधारभूत धारणायें (Some Basic Concepts)

Probability को Mathematically परिभाषित करने से पहले कुछ निम्नलिखित धारणाओं का ज्ञान होना अति आवश्यक है। ये इस प्रकार से है :–

(1) परीक्षण (An Experiment) :– जब किसी सांख्यिकी की जानकारी के लिए हम कोई प्रयोग (Trial) करते हैं तो उसे परीक्षण (Experiment) कहते हैं। उदाहरण के लिए जब हम किसी सिक्के (Coin) को उछालते हैं तो Head या Tail में से कोई एक आ सकता है। यहाँ सिक्के को एक बार उछालना एक परीक्षण (An Experiment) है।

(2) घटना (Event) :– किसी परीक्षण के परिणामों को घटनाएं कहते हैं। (The outcomes of an experiment are called Events) । उदाहरण के तौर पर जब हम किसी सिक्के को उछालते है तो दो outcomes हो सकती हैं या तो Head आएगा या फिर Tail। इसलिए दो घटनाएं (Events) होगीं।

(3) सम्पूर्ण घटनाएं (Exhaustive Events) :– यदि किसी प्रयोग के सभी सम्भव परिणामों को सूचिबद्ध किया जाए तो, उसे सम्पूर्ण घटनाएं कहा जाएगा। (The Total number of all Possible outcomes of a trial/Experiment are called Exhaustive Events) उदाहरण के तौर पर एक Die (पासा) को एक बार उछालने पर कुछ 6 सम्पूर्ण घटनाएं होगी और दो पासों (Deice) को एक साथ एक बार उछालने पर $6 \times 6 = 36$ कुल सम्पूर्ण घटनाएं होगी।

(4) समान रूप से घटित घटनाएं (Equally likely Events) :– जब किसी घटना (Event) के घटने की सम्भावना दूसरी घटनाओं के घटने की सम्भावना के बराबर हो तो उन्हे समान रूप से घटित घटनाएं कहा जाएगा। (Any two events are said to be equally likely if the chances of happening of one is same as the chances of happening of other). उदाहरण के तौर पर अगर किसी सिक्के को एक बार उछालते हैं तो Head या Tail आने की same सम्भवना है। These two events are called Equally likely.

(5) परस्पर अपवर्जी घटनाएं (Mutually Exclusive Events) :– जब कोई दो घटनाएं (events) एक साथ घटित नहीं हो सकते तो उन्हे परस्पर अपवर्जी घटनाएं कहा जाता है। जैसे किसी सिक्के को एक बार उछालने पर Head या Tail में से कोई एक ही आएगा। दोनों एक साथ नहीं आ सकते।

(6) पूरक घटनाएं (Complementary Events) :– यदि दो घटनाएं आपस में परस्पर अपवर्जी (Mutually Exclusive) और सम्पूर्ण (Exhaustive) है तो इन घटनाओं को एक दूसरे की पूरक घटनाएं कहा जाएगा। उदाहरण के तौर पर जब एक पासे (Dice) को उछाला जाता है तो even numbers (2, 4, 6) तथा odd numbers (3, 5, 1) का घटित होना पूरक घटनाएं कहलाता है।

Remarks

<u>(7) सरल एवं संयुक्त घटनाएं (Simple and Compound Events)</u> :– जब एक समय में एक ही घटना के घटित होने की सम्भावना ज्ञात की जाती है, तो वह सरल घटना कहलाती है। यदि हम दो या दो से अधिक घटनाओं के साथ घटित होने की सम्भावना निकालना चाहे या यदि हम चाहे कि दो या अधिक घटनाएं एक साथ घटित हो, तो उन्हें संयुक्त घटनाएं कहा जाता है। उदाहरण के तौर पर यदि एक थैले में 10 काली और 10 सफेद गेंद हो तो यदि हम किसी एक काली या एक सफेद गेंद निकालने की Probability ज्ञात करते हैं तो वह सरल घटना होगी। अगर हम दो सिक्के एक साथ उछालते हैं और दोनों पर Head आने की Probability निकालते हैं तो वह संयुक्त (Compound) घटना होगी।

<u>(8) स्वतंत्र घटना (Independent Events)</u> :– जब एक घटना (event) का घटित होना दूसरे के घटित होने पर कोई प्रभाव ना डाले तो ये दोनों घटनाएं स्वतन्त्र (Independent) कहलाती हैं।

उदाहरण :– जैसे हम एक बार Dice उछालते हैं तो इस पर आये परिणाम पर दूसरी बार इसी Dice को उछालने पर आये परिणाम का काई प्रभाव नहीं पड़ता। इसे Independent event कहा जाता है।

<u>(9) आश्रित घटनाएं (Dependent Events)</u> :– जब एक घटना के घटित होना का प्रभाव दूसरी घटना पर पड़े तो ये आश्रित घटनाएं कहलाती है। उदाहरण के तौर पर अगर किसी एक बैग में 5 काली और 5 नीली गेंद हो तो एक बार में एक काली गेंद निकालने का प्रभाव दूसरी बार में एक नीली गेंद निकालने पर पड़ता है यदि हर बार में निकाली गई गेंद वापसी थैले में ना रखी जाए।

<u>प्राबबिलिटि या प्रायिकता की परिभाषा :–</u>

Probability की कोई एक सर्वमान्य परिभाषा नहीं है। परिभाषा की तीन मुख्य धारणाएं प्रचलित है जो निम्न प्रकार है :

1. **परम्परावादी धारणा (Classical Approach)**
2. **सापेक्षिक आवृति की धारणा (Relative Frequency Approach)**
3. **भागवत धारणा (Subjective Approach)**

1. <u>परम्परावादी धारणा :–</u> Probability की यह सबसे पुरानी व सरल परिभाषा है। यह परिभाषा इस मान्यता पर आधारित है कि किसी प्रयोग (Experiment) द्वारा प्राप्त समस्त परिणाम (outcomes or results) सम–सम्भावी रूप से घटित होने वाले हैं। लाप्लेस के अनुसार, "Probability is the ratio of the favourable cases to the total number of equally likely cases")

2. <u>सापेक्षिक आवृति की धारणा :–</u> (Relative frequency Definition) इस पर आधारित probability की परिभाषा तर्क पर नहीं बल्कि भूतकालिन अनुभव व परीक्षणों पर आधारित है। कैन और कीपिंग (Kenny and Keeping) के अनुसार, "If an event has occurred r times in a series of n independent trails all are made under the identical conditions, the ratio $\frac{r}{n}$ is called the relative frequency of success. The limit of $\frac{r}{n}$ as n approaches to infinity is the probability of the occurrence of the event."

Remarks

सूत्रानुसार

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n} \qquad \text{(Provided the limit exists)}$$

उदाहरण के लिए यदि हम एक सिक्के को 100 बार उछाले और 55 बार Head आये, तो Head (H) की सापेक्ष आवृती (Relative frequency) $\frac{55}{100} = 0.55$ होगी। अगर प्रयोगों की संख्या अनन्त (infinity) हो तो यह ratio Probability के बराबर हो जाएगी।

3. **भागवत दृष्टिकोण (Subjective Approach) :-** इस Approach के अनुसार किसी घटना की Probability का माप एक व्यक्ति के द्वारा उसके पास उपलब्ध आंकड़ों के आधार पर किया जाता है। अतएव Probability एक व्यक्ति के विश्वास को व्यक्त करती है, जो वह घटना के बारे में व्यक्त करता है। परन्तु यहाँ मुख्य समस्या यह है कि विभिन्न व्यक्तियों के विश्वास की मात्रा विभिन्न होती है जबकि उपलब्ध आंकड़े समान रहे।

Probability के मूल नियम (Theorems of Probability)

प्रोबबिलिटी की मुख्य तीन Theorems है :–

1. अडीशन थ्योरम (Addition Theorem)
2. गुणा थ्योरम (Multiplication Theorem)
3. बेयज थ्योरम (Baye's Theorem)

1. अडीशन थ्योरम :– Addition Theorem का अध्ययन दो शीर्षकों के अन्तर्गत किया जाता है :

(a) Addition Theorem for Mutually Exclusive Events

Mutually Exclusive Events के केस में यदि A और B दो mutually exclusive events हों, तो दोनों में से किसी एक घटना के घटने की Probability दोनों घटनाओं A तथा B की अलग – अलग Probability के योग के बराबर होगी।

P (A or B) = P (A) + P (B)

Generalisation: This theorem cab be extended upto a number of times i.e. If A, B, C, ... are the events then

P (A or B or C or ....) = P(A) + P(B) + P(C) + ...

or P(A+B+C+.........) = P(A) + P(B) + P(C) + ...

Example (1) :- A card is drawn from a pack of 52 cards. What is the probability of getting either a King or queen ?

Solution : - There are 4 Kings and 4 queens in a Pack of 52 cards.

Remarks

The Probability of drawing a King Card is P(A) = $\frac{4}{52}$ and the probability of drawing a queen card is P(B) = $\frac{4}{52}$

Since both the events are mutually exclusive, the Probability that the card drawn either a King or queen is : -

P (A or B) = P (A + B) = P (A) + P(B)

$$= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

2. Addition Theorem for Non Mutually Exclusive Events

संशोधित अडीशन थ्योरम (Modified Addition theorem) के अनुसार '' यदि A और B दो परस्पर अपवर्जी घटनाएं न हों तो उनमें A या B या दोनों (Either A or B or both) के घटने की Probability A के घटने की Probability जमा B के घटने की Probability के घटा दोनों के एक साथ घटने (Happens) की Probability के बराबर होती है।''

उक्तानुसार : P(A or B or both) = P(A) + P(B) – P (A and B)

or P (A or B) = P (A) + P (B) – P(A.B)

Generalisation : - If A, B and C are any three event then P (Either A or B or C) = P(A) + P(B)+P(C) – P(AB) –P(AC) –P(BC) + P(ABC)

Example 2 :- A bag contains 30 balls numbered from 1 to 30. One ball is drawn at random. Find the probability that the number of ball is multiple of 5 or 6.

Solution : - The Probability of the ball being Multiple of 5 is i.e. (5, 10, 15, 20, 25, 30)

P (A) = $\frac{6}{30}$

The Probability of the ball being Multiple of 6 is i.e. (6, 12, 18, 24, 30) is P (B) = $\frac{5}{30}$

Since 30 is a multiple of 5 as well as 6, therefore the events are not mutually exclusive.

P (A and B) = $\frac{1}{30}$ (Common Multiple 30)

So, the Probability of getting a ball being Multiple of 5 or 6 is

P(A or B) = P(A) + P(B) – P (AB)

$$= \frac{6}{30} + \frac{5}{30} - \frac{1}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Remarks

3. Multiplication Theorem : -

यदि A और B दो स्वतन्त्र (Independent) घटनाएं है तो इन दोनो A और B घटनाओं के एक साथ घटने की Probability दोनों घटनाओं की अलग – अलग घटने की व्यक्तिगत Probability की गुणा के बराबर होती है।

$$P(AB) = P(A) \times P(B)$$

Generalisation :- If A, B and C are three independent events then

$$P(ABC) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

Example 3 :- A coin is tossed 3 times. What is the Probability of getting all the 3 heads ?

Solution :- Probability of head in first toss $P(A) = \frac{1}{2}$

Probability of head on the second toss $P(B) = \frac{1}{2}$

Probability of head on third toss $P(C) = \frac{1}{2}$

Since the event of getting head in each toss is independent

So $P(ABC) = P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

सशर्त प्रायिकता (Conditional Probability)

यदि A और B दो आश्रित (Dependent) घटनाएं हैं तो, B के घटने की Conditional Probability is given by

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \text{ Provided } P(A) > 0$$

इसी प्रकार $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$; Provided $P(B) > 0$

Example 4 : - A bag contains 10 white and 5 black balls. Two balls are drawn at random one after the other without replacement. Find the Probability that both balls drawn are black.

Solution :- The Probability of drawing a black ball in the first attempt is :

$$P(A) = \frac{5}{10+5} = \frac{5}{15}$$

The Probability of drawing the second black ball given that the first drawn is black and not replaced is $P(B/A) = \frac{4}{10+4} = \frac{4}{14}$

Since, the events are dependent, so the probability that both balls drawn are black is :

Remarks

$$P(AB) = P(A).\ P(B/A)$$

$$= \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$$

3. **बेयज Theorem : - (Bayes's Theorem) : -**

इस Theorem को Inverse Probability Theorem भी कहा जाता है। In this theorem the priori probabilities are revised in the light of new sample information and posteriori probabilities are obtained.

उदाहरण के तौर पर यदि किसी थैले में 6 काली और 4 सफेद गेंदे है तथा दूसरे थैले में 4 काली और 6 सफेद गेंदे हैं। अब किसी एक थैले में से एक गेंद निकाली जाये और मान लो कि वह काली हो और अब यह ज्ञात करना है कि गेंद पहले थैले में से निकाली गई है या दूसरे से, तो इसकी Probability Bayes's Theorem के अनुसार निकाली जाएगी।

<u>Statement of Bayes's Theorem : -</u>

यदि A_1 and A_2 दो Mutually Exclusive and exhaustive events हों और B ऐसी घटना है जो A_1 and A_2 दोनों में से घटित है सकती है, तो घटना B के घट जाने पर घटना A_1 एवं A_2 घटित होने की Probability निम्न ढंग से ज्ञात की जा सकती है :

$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1).\quad \mathrm{P(B/A_1)}}{P(A_1).\quad \mathrm{P(B/A_1)} + P(A_2).\quad \mathrm{P(B/A_2)}}$$

Similarly

$$P(A_2 / B) = \frac{P(A_2).\quad \mathrm{P(B/A_2)}}{P(A_1).\quad \mathrm{P(B/A_1)} + P(A_2).\quad \mathrm{P(B/A_2)}}$$

<u>Example : -</u> A company has two plants to manufacture scooters. Plant I manufactures 70% of the scooters and plants II manufacture 30%. At plant I, 80% scooters are rated standard quality and at plant II, 90% of the scooters are rated standard quality. A scooter is picked up at random and it found to be standard quality. What is the chance that it comes from plant I ?

Solution : - Let A_1 and A_2 be the events that scooter is manufactured by plant I and II respectively. Let B be the event that the scooter is of standard quality.

$$P(A_1) = 70\% = \frac{70}{100}$$

$$P(A_2) = 30\% = \frac{30}{100}$$

$$P(\mathrm{B}/ A_1) = 80\% = \frac{80}{100}$$

$$P(\mathrm{B}/ A_2) = 90\% = \frac{90}{100}$$

Now :

Remarks

Events	Prior Probability	Conditional Probability	Joint Probability
A_1	$P(A_1) = \frac{70}{100}$	$P(B/A_1) = \frac{80}{100}$	$\frac{70}{100} \times \frac{80}{100}$
A_2	$P(A_2) = \frac{30}{100}$	$P(B/A_2) = \frac{90}{100}$	$\frac{30}{100} \times \frac{90}{100}$

We are to find $P(A_1/B)$ i.e. the Probability of the standard quality scooter was produced by Plant I.

So by Bayes theorem.

$$P(A_1 / B) = \frac{\text{Joint Probability of the Ist Plant}}{\text{Sum of Joint Probability of Both Plants}}$$

$$= \frac{70}{100} \times \frac{80}{100}$$

$$= \frac{70}{100} \times \frac{80}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{90}{100} = \frac{56}{83}$$

Use of combinations in the Probability :-

If there are total n cases, then to select r cases at random from these then total number of possible ways are $n_{c_r} = \frac{n\ !}{(n-r)\ !\ r\ !}$

Here n ! = n factorial

$= n \times (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 4 \times 3 \times 2 \times 1$

If n = 5

then n ! = 5! = $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Example : A bag contain 4 black, 5 White and 3 red balls, what is the Probability of getting 3 black balls ?

Solution :- The total number of balls = 4 + 5+ 3 = 12

As we know Probability = $\frac{\text{Favourable cases}}{\text{Total no. of cases}}$

Total number of cases i.e. any three balls can be drawn out of the total 12 balls = 12_{C_3}

$$12_{C_3} = \frac{12\ !}{9\ !\ \times\ 3!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9\ ! \times 6} = 220.$$

Fovourable cases= no. of three balls can be drawn out of the total four black balls.

$$= 4_{C_3} = \frac{4\ !}{1\ !\ \times\ 3!} = \frac{4 \times 3!}{1\ ! \times 3\ !} = 4$$

Remarks

So, Probability of getting three black balls = $\frac{4}{220} = \frac{1}{55}$

Some More Examples on Probability :

Example 1. Two dice are tossed. Find the Probability that the sum of dots on the faces that turn up is

(i) 8, (ii) 7, (iii) 11.

There are total $6\times 6 = 36$ likely cases of throwing of two dice.

(i) Number of total possible outcomes = 36.

Number of outcomes fovourable to 8 are (6,2), (5,3), (4,4), (3,5) and (2,6)

i.e. the number of outcomes favourable to 8 are five

$\therefore$ Probability that sum of dots is 8 = P

$= P = \frac{5}{36}\ Ans$

(ii) The number of outcomes favourable to 7 are (6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)

i.e. the number of favourable outcomes = 6

$\therefore\ P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(iii) The number of favourable outcomes to 11 are (6,5), (5,6)

$\therefore$ the number of favourbale cases = 2

Probability = $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Example : A card is drawn at random from a pack of cards. Find the probability that the drawn card is either a club or an ace of diamond.

Solution :- The Probability of drawing a card of club $P(A) = \frac{13}{52}$

The Probability of drawing on ace of diamond $P(\mathrm{B}) = \frac{1}{52}$

Since the events are mutually exclusive, the probability of the drawn card being a club or an ace of diamond is P (A or B).

P(A or B) = P(A) + P(B)

$$= \frac{13}{52} + \frac{1}{52} = \frac{14}{52} = \frac{7}{26}$$

Remarks

Example :

A bag contains 30 balls numbered from 1 to 30. One ball is drawn at random. Find the probability that the number of ball its multiple of 5 or 6.

Solution :- The Probability of the ball being multiple of 5 is (5, 10, 15, 20, 25, 30)

$$P(A) = \frac{6}{30}.$$

The Probability of the ball being multiple of 6 is (6, 12, 18, 24, 30)

$$P(B) = \frac{5}{30}.$$

Since, 30 is a multiple of 5 as well as 6, therefore the events are not mutually exclusive.

$$P\,(A \text{ and } B) = \frac{1}{30}$$

$$P\,(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= \frac{6}{30} + \frac{5}{30} - \frac{1}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Example : - A bag containing 5 white and 3 black balls. Two balls are drawn at random one after another with replacement. Find the Probability that both the balls drawn are black.

Solution :- Probability of drawing black ball in the first draw $P(A) = \frac{3}{8}$

Probability of drawing black ball in the second draw $P(B) = \frac{3}{8}$.

Since, the events are independent, the Probability that both the balls are black

$$\therefore P\,(2 \text{ black}) = P(\text{Ist Black}) \times P\,(2^{nd} \text{ Black})$$

$$= \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

Example : - A person is known to hit the target in 3 out of 4 shots whereas another person is known to hit the target in 2 out of 3 shots. Find the Probability of the target being bit at all when they both try.

Solution :- Probability of hitting the target by A is $P(A) = \frac{3}{4}$

Probability of hitting the target B is $P(B) = \frac{2}{3}$

Remarks

Probability that target is not hit by A is $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Probability that target is not hit by B is $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Since, the events are independent, the Probability of not hitting by both A and B is $P(\overline{A} \cdot \overline{B})$

$$P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

Hence, Probability of hitting all = 1 − P (not hitting at all) $= 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

प्रगति की जाँच :

1. प्रायिकता का मूल्य किस सीमा में निर्धारित होता है ?
2. प्रायिकता का गुणा का नियम की व्याख्या करें।
3. बेज सिद्धान्त किसने प्रतिपादित किया।
4. सामान्य वितरण की सीमाएं बताओ।

उत्तर :–

1. 0 to 1
2. P(A and B) = P(A) × P(B)
3. Thomas Bayes
4. $-x$ to $+x$

i.e.

$$P(A) = p = \frac{\text{Number of favourable cases}}{\text{Total number of cases}}$$

$$p = \frac{m}{n}$$

Where, P(A) = Probability of occurrence of an event A

m = Number of favourable cases

Remarks

n = Total number of equally likely cases.

इसी प्रकार :

$P(\overline{A})$ = q = Probability of non-occurrence of event A

or $P(\overline{A})$ = i – P(A) = $\left(1-\frac{m}{n}\right)$

उपरोक्त से स्पष्ट है कि $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Remarks

References:-

1. Chhikara, K. (2015): Statistical Methods. Directorate of Distance Education, M.D.U., Rohtak.
2. Jain, T.R. etal (2011-12): Business Statistics. V.K. Publication Pvt. Ltd, ISBN; 9789380901763